Ixmati
Observatorio Organizacional
Investigación y Experiencia Profesional

Esperanza de vida en el Estado de puebla.

Pronósticos bajo la teoría de estabilidad acotada

AUTOR

Alejandro Mendoza de Jesús

Estudiante de la Licenciatura en Actuaría
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
AMJPC12@outlook.com

COAUTOR
Mtro. Javier González Rosas
Jefe de Departamento de Integración Programática
Profesor de la Maestría en Salud Pública en la Universidad del Ejército y Fuerza Aérea Mexicanos
xavier.rosas@prodigy.net.mx

Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes
Profesora investigadora de tiempo completo de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
hreyes@fcfm.buap.mx

Resumen

Hoy en día, la investigación demográfica ha comenzado a ganar relevancia en el mundo moderno. Uno de los resultados más importantes del estudio demográfico es la estimación de la *esperanza de vida*, es decir, el tiempo esperado que vivirá una persona.

La metodología de acotamiento estable determina que, al delimitar a la demografía en su conjunto, los factores y componentes se limitan del mismo modo, por lo que la esperanza de vida deberá tener un comportamiento asintótico a través del tiempo.

En México, el nivel máximo de esperanza de vida de la población se encuentra en 76 años de edad, mientras que el mínimo se encuentra en los 47.78, mismos que se ubican como las cotas mínima y máxima de la esperanza de vida. Este fenómeno responde a una ley de probabilidad, bajo una función que depende del tiempo.

De esta forma, se demostró no solo la existencia, sino el regimiento, del comportamiento logístico dentro de los componentes demográficos del estado de Puebla probando las hipótesis correspondientes bajo las leyes de la estadística.

Para el año 2030, se espera que el tiempo de vida completo para un recién nacido en el estado de Puebla sea de 76.

Palabras Clave
Esperanza de vida, Puebla, Teoría de Estabilidad Acotada.

Introducción

Hoy en día, la investigación demográfica ha comenzado a ganar relevancia en el mundo moderno (Welti, 2007). Aspectos ambientales, económicos, sociales y de salud requieren información demográfica para que las naciones estipulen los cambios gubernamentales necesarios. Uno de los resultados más importantes del estudio demográfico es la estimación de la esperanza de vida, es decir, el tiempo esperado que vivirá una persona. Dicho concepto es de suma importancia para evaluar el contexto económico y social de cualquier país, puesto que a mayor índice de tiempo de vida se espera que la nación tenga mejores índices de estabilidad económica, educación, salubridad, menores índices de desempleo y mayor respaldo en seguridad social; en pocas palabras, el índice de esperanza de vida proyecta directamente la calidad de vida de las personas (Mina Valdés, 2012).

Actualmente, los países europeos poseen los índices más elevados al contar con mayores recursos destinados a la salud y la investigación, mejores estándares alimenticios y cultura en general sobre el ejercicio y el cuidado del medio ambiente. El factor salud es imprescindible en este aspecto, el cual puede ser afectado por variables climatológicas, ambientales, sociales, históricas e higiénicas, por lo que el tiempo de vida de un individuo puede variar de otro aun cuando ambos radiquen en el mismo país.

Por lo que al estudiar al estado de Puebla de manera individual implica obtener resultados semejantes, pero no iguales, al resto del país.

Metodología

El campo biológico ha descubierto que el crecimiento poblacional de muchas especies se distribuye a través de un comportamiento logístico en el tiempo; se ha demostrado que la disposición demográfica de la especie humana se organiza de la misma manera (Vandermeer, 2010). La población mexicana también ha sido evaluada bajo condiciones similares y se ha llegado a la conclusión de que sigue una función logística que la contiene en un intervalo con un mínimo y un máximo, es decir, que la acota. La metodología de acotamiento estable determina que, al delimitar a la demografía en su conjunto, los factores y componentes se limitan del mismo modo, por lo que la esperanza de vida deberá tener un comportamiento asintótico a través del tiempo. Para analizar la esperanza de vida en el estado de Puebla, se utilizará información de 1960 a 2016 obtenida del Consejo Nacional de Población (CONAPO). Dichos datos fueron ordenados en la siguiente tabla:

Tabla 1. Esperanza de vida del estado de Puebla, 1960-2016

Año	Esperanza de vida	Año	Esperanza de vida
1960	57.25	2005	73.62
1965	59.51	2006	73.76
1970	62.04	2007	73.88
1975	64.82	2008	73.88
1980	67.42	2009	73.96
1985	69.47	2010	74.07
1990	71.29	2011	74.22
1995	72.73	2012	74.37
2001	73.01	2013	74.54
2002	73.18	2014	74.72
2003	73.34	2015	74.89
2004	73.49	2016	75.05

Fuente. Elaboración propia con la información obtenida del Consejo Nacional de Población [CONAPO] (2016).

En la figura 1 se puede apreciar cómo evoluciona la variable a través del tiempo. Se puede observar un aumento constante de dos a tres años de vida adicional, por cada lapso antes de entrar al siglo XXI; después de esta fecha la esperanza disminuye en su cambio relativo creciente. Esto se puede atribuir a diferentes causas e implicaciones de diversos tipos, desde históricos hasta tecnológicos en el sector salud. Se espera que, bajo las mismas condiciones, la esperanza de vida siga la misma distribución y continúe en aumento, en proporción a las tasas de crecimientos obtenidas de los datos de CONAPO.

Figura 1. *Esperanza de vida del estado de Puebla.*

Fuente. Elaboración propia con la información obtenida de CONAPO (2016).

El mínimo y máximo de la esperanza de vida

La teoría de estabilidad acotada (González Rosas y Zárate Gutiérrez, 2018) se fundamenta en dos importantes postulados. El primero establece que la esperanza de vida es un fenómeno aleatorio, es decir, de acuerdo con la teoría de probabilidad, cada año tiene una media y una varianza; el segundo, la media del tiempo de vida se define por una función matemática que depende del tiempo, lo cual implica que cada año la esperanza será explicada por una función matemática más una variable aleatoria. Medhi (1981) los nombró el componente determinístico y estocástico respectivamente. Bajo estos principios, el comportamiento de las observaciones y la media de la esperanza en cada lapso será:

$$e_t = f(t) + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\mu_e^t = f(t). \qquad (2)$$

Donde:
e_t denota la esperanza de vida en el tiempo t.
$f(t)$ es una función matemática desconocida.
ε_t son errores independientes con distribución $N(0, k)$ donde k es una constante,
μ_e^t denota la media de la esperanza de vida en el tiempo t.

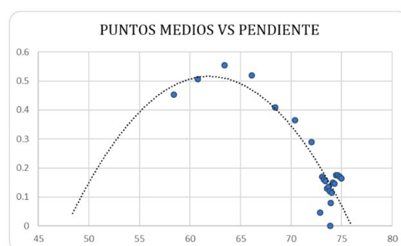
Para obtener el mínimo y máximo del tiempo de vida, la teoría de estabilidad acotada usa el cambio de la esperanza a través del tiempo. Por lo que se utilizará el concepto de la pendiente de la línea que se obtiene de la unión de dos lapsos consecutivos. Se definen las pendientes y los puntos medios entre dos lapsos consecutivos de la siguiente manera:

$$\nabla_t^e = \frac{e_{t_{i+1}} - e_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \quad (3)$$

$$PM_t^e = \frac{e_{t_{i+1}} + e_{t_i}}{2} \,. (4)$$

∇_t^e denota la pendiente de la línea que une a los puntos (e_{t_i}, t_i) y $(e_{t_{i+1}}, t_{i+1})$.
PM_t^e representa el promedio de los valores $(e_{t_i}, e_{t_{i+1}})$.

Figura 2. Gráfica de los puntos medios y pendientes 1960-2016.



Fuente: elaboración propia con información de CONAPO (2016).

En la tabla 2 podemos observar los resultados de los cálculos para los puntos medios y las pendientes. Mientras, la figura 2 nos modela los puntos medios sobre el eje X y las pendientes en el eje Y. Prestemos atención en como las pendientes actúan respecto al tiempo ya que en algún punto esta sufre un cambio de signo.

Analicemos en la figura 2 cómo la distribución de las pendientes con respecto a las medias de las esperanzas de vida sigue un patrón parabólico, es decir, la función sigue un aumento en el tiempo y en algún momento, el signo de la pendiente se invierte, por lo que la función comienza a decrecer.

Tabla 2. Tabulación de los puntos medios y pendientes 1960-2016.

Año	Periodo	Esperanza de vida	Puntos medios	Pendiente
1960	0	57.25	58.38	0.45
1965	5	59.51	60.78	0.50
1970	10	62.04	63.43	0.55
1975	15	64.82	66.12	0.52
1980	20	67.42	68.44	0.41
1985	25	69.47	70.38	0.36
1990	30	71.29	72.01	0.28
1995	35	72.73	72.87	0.045
2001	41	73.01	73.09	0.17
2002	42	73.18	73.26	0.16
2003	43	73.34	73.41	0.15
2004	44	73.49	73.56	0.13
2005	45	73.62	73.69	0.13
2006	46	73.76	73.82	0.12
2007	47	73.88	73.88	0.00
2008	48	73.88	73.92	0.08
2009	49	73.96	74.01	0.11
2010	50	74.07	74.15	0.15
2011	51	74.22	74.29	0.14
2012	52	74.37	74.45	0.17
2013	53	74.54	74.63	0.17
2014	54	74.72	74.80	0.17
2015	55	74.89	74.97	0.16
2016	56	75.05		

Fuente: Elaboración propia.

Por definición, una función de segundo grado (línea punteada de la figura 2), debe tener dos raíces, es decir, dos puntos de intersección entre la gráfica y el eje X. Como el concepto graficado es la pendiente, nos interesa conocer los valores donde ésta toma el valor 0, pues es donde el mínimo y el máximo se presentan.

Llamaremos a la primera raíz c_1 y a la segunda raíz c_1+c_2. Donde c_1 será el mínimo de la esperanza de vida mientras que el valor c_1+c_2 será su máximo.

Estos serán los valores por los que la esperanza de vida en el estado de Puebla se encuentra acotada a través del tiempo.

Antes de estimarlos, debemos demostrar su existencia, para ello, ajustamos el siguiente modelo de regresión lineal que explica a la línea parabólica estimada en la figura 2.

Se define,

$$\boldsymbol{\nabla_t^e = Ae_{t_i}{}^2 + Be_{t_i} + C + \pi_i} \quad \mathbf{(5)}$$

$$\boldsymbol{\mu_\nabla^t = Ae_{t_i}{}^2 + Be_{t_i} + C.} \quad \mathbf{(6)}$$

Donde:
A, B Y C, son constantes desconocidas.
$\boldsymbol{\mu_\nabla^t}$**,** media de la esperanza de vida.
$\boldsymbol{\pi_i}$**,** son los errores independientes con distribución $N(0, h)$. Donde h es una constante.
Como se ha dicho previamente el máximo y el mínimo ocurren cuando la derivada de la esperanza de vida es igual a 0. Es decir,

$$\boldsymbol{Ae_{t_i}{}^2 + Be_{t_i} + C = 0.}$$

Usando la fórmula general para la obtención de raíces reales de un polinomio de segundo grado, tenemos que:

$$c_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (7)$$

$$c_1 + c_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (8)$$

Los resultados de (7) y (8) son los estimadores para el mínimo y máximo del tiempo esperado de vida.

La tabla 3 muestra los estimadores obtenidos usando la metodología de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) (Montgomery, Peck y Vining, 2016), así como su significancia estadística.
Haciendo uso de la significancia de los parámetros, observamos que son estadísticamente significativos a un nivel de confianza del 95%.

Utilizando los coeficientes obtenidos se sustituyen en la formula general para la obtención de las cotas. Las variables A, B y C son sustituidas por los valores de la tabla 3.

$$c_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 47.78$$

$$c_1 + c_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 76.$$

Tabla 3. Parámetros estimados por MCO.

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor t	p-valor
A	-0.0025	0.0007721	-3.36	0.003
B	0.3212	0.1043528	3.07	0.005
C	-9.4251	3.5016027	-2.69	0.014

Fuente: Elaboración propia.

Con un estadístico F igual a 53 y un p-valor de 0.000 se prueba el supuesto parabólico presente en (6) con un coeficiente de determinación con un nivel de 82.54%.

Usando las raíces del polinomio cuadrático obtenemos las cotas para la esperanza de vida, las cuales toman los valores, $\boldsymbol{c}_1$=47.78 y $\boldsymbol{c}_1$+ $\boldsymbol{c}_2$=76.

En resumen, sin importar el lapso que sea considerado, la media para la esperanza de vida poblana siempre se encontrará en el intervalo:

(47.78, 76)

Patrón para la esperanza de vida.

De acuerdo con la teoría estable y acotada, el comportamiento de la esperanza de vida en cada tiempo se determina por:

$$\boldsymbol{e_t} = \boldsymbol{f(t) + \varepsilon_t}$$

$$\boldsymbol{\mu_e^t} = \boldsymbol{f(t)}.$$

Pero, no olvidemos que éstas son desconocidas. Sin embargo, según el comportamiento de las funciones podemos conocer su naturaleza. Sabemos que la esperanza de vida sigue una función que es creciente, por lo que su derivada debe ser positiva, además conocemos que en el mínimo y máximo su derivada es igual a 0.

Usando la teoría de ecuaciones diferenciales, se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\frac{df}{dt} = h(e)\, j(t). \quad (9)$$

Es decir, la derivada de la función desconocida puede ser vista como el producto de dos funciones, una que está en función de la esperanza observada y la segunda en función del tiempo. Ahora, usando las raíces:

$$h(e) = (e - c_1)(\boldsymbol{e} - c_1 - c_2).$$

Observemos que (9) es una ecuación diferencial de variables separables (Zill, 2011). Por lo que:

$$\int \frac{1}{(e - c_1)(e - c_1 - c_2)} de = \int j(t)\, dt.$$

Resolvemos esta integral por el método de fracciones para obtener el resultado:

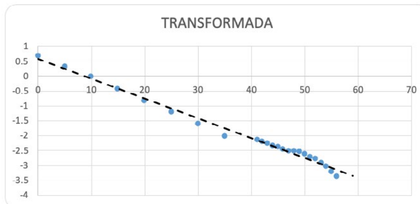
$$e = c_1 + \frac{c_2}{1 + e^{\lambda(t)}}. \quad (10)$$

Donde λ(t) es una función desconocida, sin embargo, puede estimarse por la función inversa de la última ecuación. Es decir,

$$\lambda(t) = \ln\left(\frac{c_2}{e - c_1} - 1\right). \quad (11)$$

Se llamó a esta función la transformada (Martínez y Pérez, 1993).

Figura 3. Gráfica de la función transformada 1960-2016.



Fuente: elaboración propia.

Estimación de la función λ(t)

Para estimar la transformada se necesitan los valores de las constantes:

$$c_1=47.78$$
$$c_1+c_2=76$$
$$c_2=28.22.$$

Después de esto, se calculan los valores de la transformada. Los resultados se muestran en la tabla 4.

Se puede ver en la figura 3 que la transformada sigue un comportamiento lineal a través del tiempo, es decir, la transformada tiene la forma:

$$\lambda(t)=\alpha+\beta t.$$

Esto implica que el fenómeno de la esperanza de vida sigue su distribución bajo la función:

$$e=c_1+\frac{c_2}{1+e^{\alpha+\beta t}}.$$

Para determinar los parámetros α,β se ajusta un segundo modelo de regresión lineal (Montgomery Peck y Vining, 2016) esta vez nuestra variable dependiente son los valores de la transformada mientras que la variable independiente es el periodo de tiempo.

Utilizando los parámetros obtenidos, mostrados en la Tabla 5, se obtiene la forma de la función estadísticamente aprobada.

Nuestra función para la esperanza de vida en el estado de Puebla al 95% se muestra como sigue:

$$e(t)=c_1+\frac{c_2}{1+e^{-0.066761t+0.5876}}.$$

Tabla 4. Función transformada 1960-2016.

Año	Periodo	Esperanza de vida	Transformada
1960	0	57.25	0.68306
1965	5	59.51	0.33987
1970	10	62.04	-0.02197
1975	15	64.82	-0.42143
1980	20	67.42	-0.82813
1985	25	69.47	-1.20044
1990	30	71.29	-1.60773
1995	35	72.73	-2.03381
2001	41	73.01	-2.13276
2002	42	73.18	-2.19801
2003	43	73.34	-2.26270
2004	44	73.49	-2.32878
2005	45	73.62	-2.38711
2006	46	73.76	-2.45085
2007	47	73.88	-2.51051
2008	48	73.88	-2.51051
2009	49	73.96	-2.55204
2010	50	74.07	-2.61445
2011	51	74.22	-2.70126
2012	52	74.37	-2.79195
2013	53	74.54	-2.91208
2014	54	74.72	-3.04675
2015	55	74.89	-3.19554
2016	56	75.05	-3.36254

Fuente: elaboración propia.

Tabla 5 Estimadores para la función transformada.

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Valor t	p-valor
α	0.587	0.059	9.90	0
β	-0.066	0.001	-46.75	0

Fuente: elaboración propia.

Con un estadístico F= 2186 y con un p-valor de 0.0000 se rechaza la no significancia de los parámetros de la función transformada a un nivel de confianza del 95%, además de contar con un coeficiente de determinación del 98.96%.

Resultados

Pronósticos para la esperanza de vida en Puebla.

La función obtenida para determinar el comportamiento del tiempo de vida completa al momento de nacer se establece por la función.

$$e(t) = 47.78 + \frac{28.22}{1 + e^{-0.066761t+0.5876}} . (17)$$

Donde:
e(t), denota la esperanza de vida en el tiempo t.
Por lo tanto, (17) determina el pronóstico puntual de la variable estudiada a través del tiempo.
La constante 44.78 determina la cota mínima para la esperanza de vida en el estado de Puebla.
La constante 76 denota el máximo para el tiempo de vida completo que se espera para una recién nacido para el estado de Puebla.
Así se obtienen los pronósticos obtenidos por (17) para el intervalo 2017-2030 (Tabla 6).

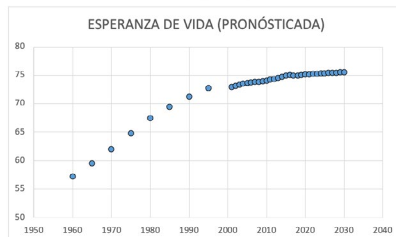
Tabla 6. Pronósticos para el periodo 2017-2030.

Año	Esperanza (pronósticada)
2017	74.91
2018	74.98
2019	75.04
2020	75.10
2021	75.16
2022	75.21
2023	75.26
2024	75.30
2025	75.35
2026	75.39
2027	75.43
2028	75.46
2029	75.50
2030	75.53

Fuente: elaboración propia.

Observamos el modelo ajustado, del cual se obtiene resultados que apoyan los pronósticos que se mueven asintóticamente al máximo obtenido con valor de 76 años de vida. Del mismo modo, se demuestra la existencia del comportamiento logístico en la esperanza de vida para el estado de Puebla.

Gráfica 4. Pronósticos para el periodo 1960-2030



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

En México, el nivel máximo de esperanza de vida de la población se encuentra en 76 años de edad, mientras que el mínimo se encuentra en los 47.78, mismos que se ubican como las cotas mínima y máxima de la esperanza de vida. Este fenómeno responde a una ley de probabilidad, bajo una función que depende del tiempo.

De esta forma, se demostró no solo la existencia, sino el regimiento, del comportamiento logístico dentro de los componentes demográficos del estado de Puebla probando las hipótesis correspondientes bajo las leyes de la estadística.
Para el periodo 2030, se espera que el tiempo de vida completo para un recién nacido en el estado de Puebla sea de 76.

Por lo que se espera que para años posteriores la esperanza de vida converja (con proporción cada vez menor) a los 76 años.

Aun cuando los datos recabados residan en el estado poblano, es imprescindible concluir que los modelos logísticos pueden ser usados en componentes demográficos de cualquier otra región.

Por último, se estipula que los valores presentados aquí son válidos siempre que las suposiciones sociales, económicas, ecológicas, salubres y ambientales no sufran cambios dentro del intervalo de tiempo considerado por los pronósticos. Es importante para el lector comprender que los resultados siempre están expuestos a la incertidumbre, así como de eventos no predecibles.

Referencias

González Rosas, J. y Zárate Gutiérrez, I. (2018). *The Stable Bounded Theory an Alternative to Projection Populations*, México: Global Journal Inc.

Martínez Calvo, M.C. y Pérez de Vargas, A. (1993). *Métodos Matemáticos en Biología.* Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

Medhi, J. (1981). *Stochastic Processes*, New York: Jhons Wiley & Sons.

Mina Valdés, A. (2012). La demografía en la formación de un actuario, material de apoyo didáctico. Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de México.

Montgomery, D., Peck, E. y Vining, G. (2016). *Introduction to linear regression:* WILEY.

Consejo Nacional de Población [CONAPO]. (2006). Proyecciones de la Población de México 2005 – 2050. Recuperado de: http://www.conapo.gob.mx/work/models/CONAPO/Proyecciones/Interactivos/Interactivo.

Vandermeer, J. (2010). How populations grow: *The exponential and logistic equations Nature Education Knowledge*, 3(10), 15. Recuperado de: http://www.nature.com/scitable/knowledge/library/how-populations-grow-the-exponential-and-logistic-13240157.

Welti, C. (2007). *Demografía I.* México, D.F.: Programa Latinoamericano de Actividades en Población.

Zill G. D. (2011). *A First Course In Differential Equations with Modeling Applications*. Boston: Brooks/Cole