

# Caracterización de un sistema de amortiguamiento: desarrollo de un simulador

Claudio Alfredo Jiménez Carranza  
Pablo Sánchez Sánchez

## Introducción:

Con la era de la robótica, varias áreas se han involucrado unas con otras, provocando la automatización de procesos de distintas tareas hechas por el humano. La mecánica, electrónica, matemática, informática, nos han mostrado las distintas áreas en la que la robótica se puede hacer presente.

Los modelos matemáticos nos han dado la posibilidad de conocer ecuaciones de movimientos de sistemas comúnmente usados, los cuales están fundamentados en una serie de hipótesis, leyes y teorías, las cuales nos ayudan a conocer más acerca de un sistema dinámico.

Una suspensión es un sistema de amortiguamiento, el cual nos permite absorber y dibujar todas las irregularidades de un terreno, eliminando los golpes que se presenten. Los componentes de una suspensión se pueden clasificar en 3 categorías respecto a su funcionamiento: 1) los órganos geométricos y estructurales de la unión rueda-bastidor, 2) los muelles y 3) los amortiguadores.

En la unión de la rueda al bastidor se han estudiado numerosas soluciones en las cuales se clasifican a las ruedas rígidas y a las independientes (donde el movimiento de una rueda no induce al movimiento de la otra). Todas las suspensiones de puente rígido están completadas por una conexión con el bastidor, tanto para las fuerzas de propulsión y frenado, como para



la fuerza generada en las curvas, en el caso de la suspensión por ballesta (ya sea por bielas sencillas o dobles) puede llegar a desarrollarla simplemente por una horquilla con perno. La suspensión se compone de:

- Resortes: Los resortes son los encargados de absorber las irregularidades del terreno, pueden ser metálicos o no metálicos.
- Resortes metálicos: Son resortes de láminas (ballestas, resortes de espirales-muelles- y barras de torsión).
- Resortes no metálicos: Resortes de goma y neumáticos.
- Amortiguadores: Son los encargados de oponerse a las fuerzas que se presentan.

Para caracterizar las suspensiones, es necesario conocer sus ecuaciones de movimiento, obteniéndolas a través de sus leyes físicas, en las cuales tenemos que considerar la dinámica de la suspensión, para con ello realizar los cálculos correctos.

EL objetivo de este artículo consiste en analizar los sistemas de amortiguamiento, para poder hacer una caracterización, presentando una técnica de simulación a bloques con Simulink® de Matlab®, facilitando el entendimiento de un sistema de amortiguamiento, para posteriores aplicaciones. Simulink® de Matlab®, es una herramienta nueva, la cual facilita la obtención de sus *seales* de funcionamiento del sistema.

Los apartados del artículo se presentarán de forma distribuida como se muestra a continuación: II. El modelado de la suspensión, III. La simulación de la respuesta del sistema con los bloques de Simulink®, IV. Aplicaciones y V. Conclusiones.

## II. El modelado de la suspensión

La suspensión que se examinará es un sistema de un grado de movilidad con vibraciones mecánicas, para entender mejor su dinámica se analizará de forma mecánica mediante la sumatorias de sus fuerzas, siguiendo su analogía

eléctrica, para así poder fundamentar correctamente su modelo de Euler-Lagrange.

a) *Modelo mecánico:*

b) : Para una suspensión la cual funciona con una masa, resorte, amortiguador dividido en dos partes, para así sujetar un neumático, se consideró el siguiente diagrama mecánico (figura 1).

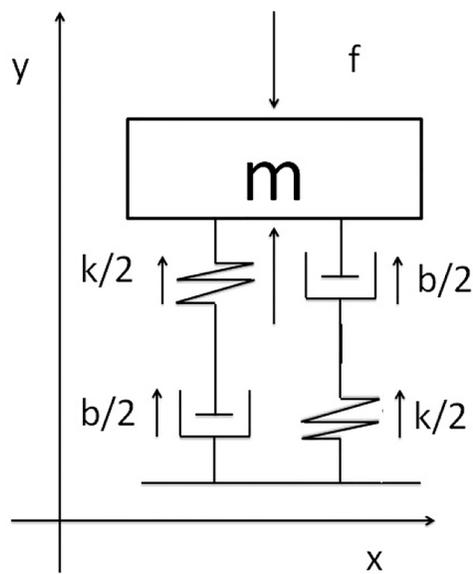


Fig. 1 . . Modelo mecánico de la horquilla.

Considerando que el movimiento de la suspensión es uniforme, es decir, que la suspensión rebota de la misma forma de un lado que del otro, se supone que los resortes y los amortiguadores son iguales y para un cálculo práctico se propuso que fueran divididos entre dos.

En el sistema mecánico propuesto, podemos apreciar una fuerza  $f$ , a la cual se le oponen otras cinco fuerzas, las que hallamos en los amortiguadores ( $b/2$ ), en los resortes ( $k/2$ ) y en la masa ( $m$ ), por tanto, su ecuación de movimiento y por segunda Ley de Newton ( $f = ma$ ), considerando la sumatorias de fuerzas en el eje Y, ( $\sum f_y = ma$ ), sería:

$$\textcircled{1} \quad \frac{md^2y}{dt^2} = \tau - \frac{k}{2}y - \frac{k}{2}y - \frac{bdy}{2dt} - \frac{bdy}{2dt}$$

Igualando al  $\tau$

$$\textcircled{2} \quad \frac{md^2y}{dt^2} + \frac{k}{2}y + \frac{k}{2}y + \frac{bdy}{2dt} + \frac{bdy}{2dt} = \tau$$

Lo cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\textcircled{3} \quad m\ddot{y} + \frac{k}{2}y + \frac{k}{2}y + \frac{b}{2}\dot{y} + \frac{b}{2}\dot{y} = \tau$$

Que es igual a:

$$\textcircled{4} \quad m\ddot{y} + ky + b\dot{y} = \tau$$

Lo cual por transformada de Laplace:  $\mathcal{L}$

$$\textcircled{5} \quad (ms^2 + k + bs)y(s) = \tau(s)$$

Para lo cual, la función de transferencia sería:

$$\textcircled{6} \quad \frac{y(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

c) Análoga eléctrica:

d) : A lo anterior podemos encontrar una analogía eléctrica y así verificar la función de transferencia del análisis mecánico y del eléctrico. Viendo que ambas son análogas se propuso la siguiente analogía eléctrica para el modelo mecánico (figura 2).

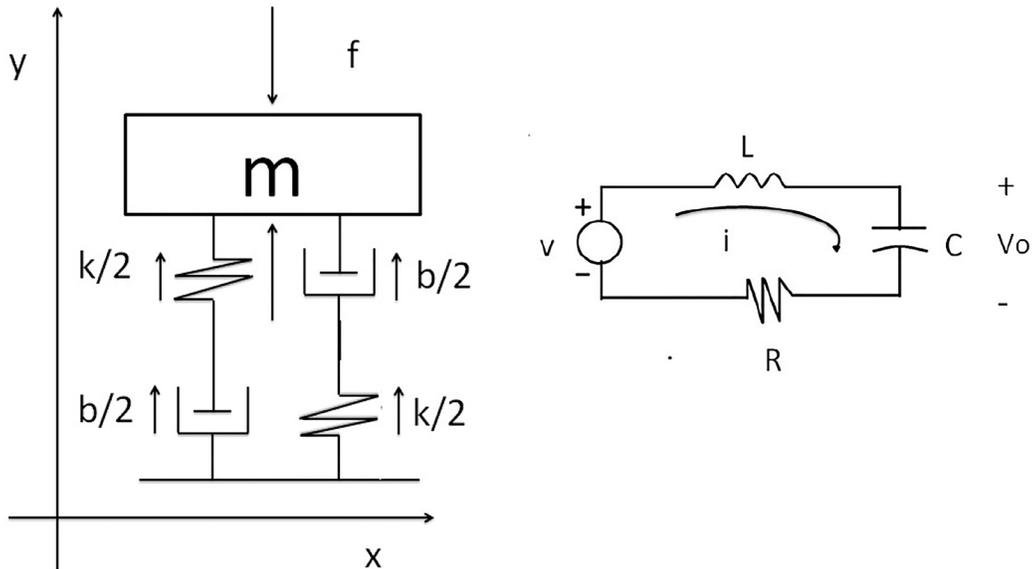


Fig. 2. Análoga eléctrica del modelo mecánico

Analizando el circuito anterior y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, que dice que el voltaje total es la suma de todos sus voltajes del circuito cerrado  $V = \sum V$ , tenemos:

$$(7) \quad v = \frac{Ldi}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt + Ri$$

Lo cual por transformada de Laplace, tenemos:  $\mathcal{L}$

$$(8) \quad v(s) = LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + RI(s)$$

Simplificando tenemos:

$$(9) \quad v(s) = I(s)(Ls + \frac{1}{Cs} + R)$$

de modo que  $I(s)$  es igual a:

$$(10) \quad I(s) = \frac{v(s)}{Ls + \frac{1}{Cs} + R}$$

Por lo tanto, y considerando que la función de transferencia es  $G(s) = \frac{\mathcal{L}(salida)}{\mathcal{L}(entrada)}$  (figura 14) es nuestra salida, tenemos:

Donde  $v_o$  :

$$(11) \quad v_o = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Lo cual por transformada de Laplace, tenemos:  $\mathcal{L}$

$$(12) \quad v_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

Por lo tanto, considerando  $G(s) = \frac{\mathcal{L}(salida)}{\mathcal{L}(entrada)} = \frac{v_o(s)}{v(s)}$  en (9) y (12) tenemos

$$(13) \quad \frac{v_o(s)}{v(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} I(s)}{I(s)(Ls + \frac{1}{Cs} + R)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

En donde comparando las funciones de transferencia en (6) y (13), podemos apreciar que son análogas con la siguiente igualdad:

$$m = L, \quad b = R \quad k = \frac{1}{C}$$

### 1) Modelo de Euler-Lagrange:

a) : Teniendo en cuenta la representación mecánica de la suspensión y considerando que la longitud ( $l$ ) de la altura cambia, se puede pensar en que si existe una variante en el ángulo  $q$ , la longitud ( $l$ ) también cambia, lo cual podemos decir que la longitud  $l$  varía a partir del ángulo  $q$  (figura 3).

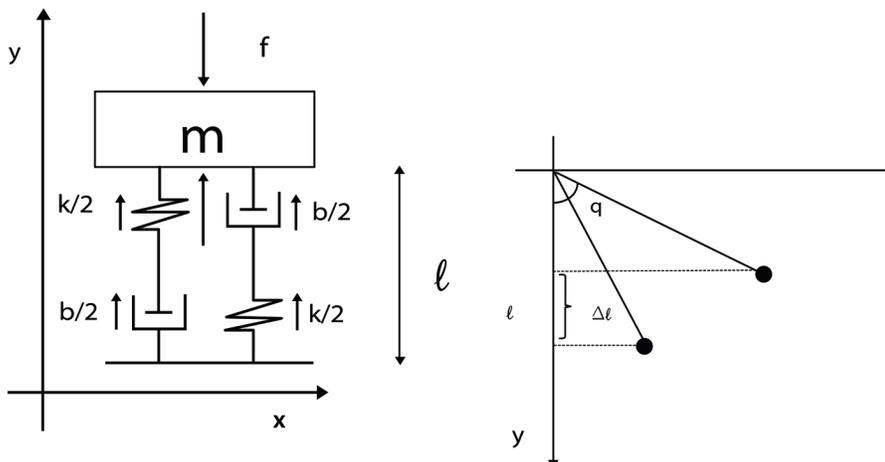


Fig. 3. Análisis de movimiento.



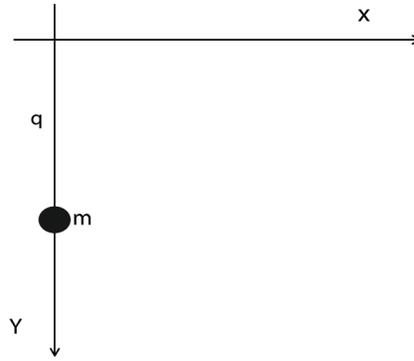


Fig. 4. Modelo para análisis Euler-Lagrange.

Considerado lo anterior y aplicando el mismo concepto, se representará el desplazamiento que sufre la masa  $m$  respecto al cambio que sufra  $q$  (figura 4).

b) *Paso 1. Cinemática Directa:* El modelo cinemático directo de una suspensión describe la relación entre la posición  $q$  y el desplazamiento del dispositivo terminal del sistema de amortiguamiento respecto a la masa  $m$ , conociendo así su posición en el espacio  $(x, y, z)$ .

Con base a la figura 4 podemos describir su posición en el espacio respecto a las variantes de  $q$ , teniendo en cuenta nuestra masa  $m$ .

$$(14) \quad m = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) *Paso 2. Vector de Velocidad:* Al conocer el vector posición de nuestro sistema, conocemos todas sus ubicaciones en el plano  $x, y, z$ , la cual podemos derivar, conociendo la velocidad del vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  que sería:

$$(15) \quad v = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De lo cual obtenemos:

$$(16) \quad v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{q} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) *Paso 3. Velocidad al cuadrado:* La velocidad al cuadrado, considerando que es un vector, se define como:

$$(17) \quad v^2 = \|v\|^2 = v^T v$$

Considerando la *energía cinética* que se presenta en la ecuación (2.25), el poste ajustable representaría la siguiente manera.

$$(18) \quad k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} I \dot{q}^2$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado resulta ser:

$$(19) \quad v^2 = (0, -\dot{q}, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{q} \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{q}^2$$

De acuerdo a la ecuación (3.62), la energía cinemática sería:

$$(20) \quad k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I \dot{q}^2$$

En la cual, considerando que el movimiento del sistema es solo translacional, es decir que el movimiento angular es cero, tenemos:

$$(21) \quad k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

e) *Paso 4. Energía potencial:* Como se mencionó en un principio, solo se está analizando el movimiento que sufre la masa respecto a  $q$ , considerando como conocido el movimiento del resorte (amortiguador) que se retomará más adelante, por lo cual según lo dicho, nuestra altura viene dada por:

$$(22) \quad q = q_{inicial} - q_{final} = h$$

Considerando que  $q$  varía, provocando que la longitud cambie de una posición inicial a una final, provocando que tengamos nuestra altura  $h$ , por lo tanto, nuestra energía potencial es:

$$(23) \quad u(q) = mgh = mgq$$

f) *Paso 5. Lagrangiano:* Por Lagrangiano se entiende que tenemos la diferencia de la energía cinética y la energía potencial, como se mostró en la ecuación (2.23), lo cual sería de la siguiente manera:

$$(24) \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}) = k(q, \dot{q}) - u(q)$$

Lo cual desarrollado sería:

$$\begin{aligned} (25) \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= k(q, \dot{q}) - u(q) \\ \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq \end{aligned}$$

g) Paso 6. Ecuaciones de Euler-Lagrange: Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, descritas en la ecuación (2.24) vienen dadas por:

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau$$

Que al desarrollarlo se obtiene:

$$(27) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}m \frac{\partial \dot{q}^2}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

El resultado de la ecuación (27), podemos obtener lo siguiente:

$$(28) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] = m \frac{d\dot{q}}{dt} = m\ddot{q} \frac{dq}{dt} = m\ddot{q}$$

Finalmente, para resolver el término  $\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q}$  obteniendo:

$$(29) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = -mg \frac{\partial q}{\partial q} = -mg$$

Considerando los resultados que se obtuvieron (28) y (29), y substituyendo en (26) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau$$

$$(30) \quad m\ddot{q} - (-mg) = \tau$$

$$m\ddot{q} + mg = \tau$$

Ahora, considerando la estructura del torque ( $\mathcal{T}$ ), la cual nos dice que el torque ( $\mathcal{T}$ ) es la diferencia entre los torques que se experimentan en un movimiento, en los cuales tenemos al par aplicado ( $\tau_a$ ), el par debido a la fricción ( $\tau_f$ ) y el par debido a la interacción con el medio ( $\tau_e$ ).

$$(31) \quad \mathcal{T} = \tau_a - \tau_f - \tau_e$$

Donde a  $\tau_f$  que es el torque debido a la fricción, se considerará la fricción por coulomb la cual se define por:

$$(32) \quad \tau_f = b\dot{q}$$

Y  $\tau_f$  que es el torque debido a la interacción con el medio, la cual se define por la matriz jacobiana transpuesta por  $h$ .

$$(33) \quad \tau_f = \mathcal{J}^t h$$

En donde si  $h = 0$  el sistema no tiene interacción con el ambiente y si  $h = 1$  se dice que interactúa con él, para lo cual, el sistema del poste ajustable no presenta interacción con el ambiente, por tanto  $h = 0$ .

h) : Obteniendo una estructura para  $\mathcal{T}$  que sería de la siguiente manera

$$(34) \quad \tau_a - b\dot{q} = \tau$$

i) : Por lo consiguiente igualando la  $\mathcal{T}$  que se obtuvo con las ecuaciones de Euler-Lagrange, y la estructura que presenta  $\mathcal{T}$ , tenemos lo siguiente:

$$m\ddot{q} + mg = \tau$$

$$(35) \quad \tau_a - b\dot{q} = \tau$$

$$m\ddot{q} + mg = \tau_a - b\dot{q}$$

Que al resolverlo, es decir, despejar el par aplicado, se tiene:

$$(36) \quad m\ddot{q} + b\dot{q} + mg = \tau_a$$

j) : Al pensar en una representación en espacio de estados de la  $\dot{x} = Ax + Bu$ , forma, con una salida  $y = Cx + Du$ , es correcto decir que se busca simplificar las ecuaciones diferenciales que se han obtenido, al ver un número menor de variables, donde se pueden definir como:

- A = matriz del sistema.
- B = matriz de entrada.
- C = vector de salida.
- D = vector de pre-alimentación.
- $\dot{x}$  = vector de estados (contiene la variables de estado).
- W = derivada del vector de estados.
- y = vector de salida.
- u = vector de entrada.

En el caso del poste ajustable tenemos hasta el momento la ecuación de movimiento de la forma:

$$(37) \quad m\ddot{q} + b\dot{q} + mg = \tau_a$$

En donde si consideramos el siguiente cambio de variables respecto al desplazamiento que ocurre en el sistema, dejando en términos de  $x$  tenemos:

$$(38) \quad \begin{array}{ll} x_1 = q & \dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 \\ x_2 = \dot{q} & \dot{x}_2 = \ddot{q} \end{array}$$

Lo cual si se recuerda la analogía eléctrica propuesta para el sistema mecánico (figura 2), se obtuvo que, por ley de voltajes de Kirchhoff, la suma de los voltajes en el circuito cerrado era igual a 0, ecuación (7).

$$(39) \quad v = \frac{Ldi}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt + Ri$$

En el que se conoció la analogía eléctrica respecto al modelo mecánico, donde  $v = f$ ,  $i = \dot{x}$ ,  $L = m$ ,  $\frac{1}{C} = k$  y  $R = b$ , en donde si cambiamos nuestras variables para así verlo en término de fuerzas y no de voltajes, tenemos:

$$f = \frac{m d\dot{x}}{dt} + k \int \dot{x} dt + b\dot{x}$$

$$(40)$$

$$f = \frac{m d\dot{x}}{dt} + kx + b\dot{x}$$

Considerando el término  $kx$  y sabiendo que en la representación de estados  $x_1 = q$ , sabiendo que nuestro  $\tau_a = fuerza$ , entonces el término  $kx$  debe ser considerado en (36), teniendo:

$$(41) \quad m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + mg = \tau_a$$

Conociendo su representación en espacio de estados, de la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

$$(42) \quad \begin{array}{ll} x_1 = q & \dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 \\ x_2 = \dot{q} & \dot{x}_2 = \ddot{q} = m^{-1}(\tau_a - bx_2 - kx_1 - mg) \end{array}$$

En donde para conocer la matriz  $A$  y el vector  $B$ , se tiene:

$$(43) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tau_a} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tau_a} \end{bmatrix} u$$

Por lo siguiente se tiene:

$$(44) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

## 2) Parámetros físicos de la horquilla:

a) : Después de haber hallado la estructura matemática que describe al problema, necesitamos conocer los parámetros físicos que la conforman, como son: el recorrido, la constante del resorte, el amortiguamiento, la masa del usuario, etcétera, para lo cual el modelo del sistema analizado fue:

$$(45) \quad m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + mg = \tau$$

b) : Ahora bien, las horquillas para bicicletas más comerciales, tienen ya establecidos parámetros para sus productos, en lo cual, se propone un promedio de los productos hoy existentes en el mercado, proponiendo sus parámetros físicos más comunes.

c) : Para posteriormente desarrollar el simulador, se necesitan conocer todos estos parámetros físicos presentados en la siguiente tabla:

Descripción:	Notación	Valor	Unidades
Masa (Considerando manubrio)	$m$	.815	kg
Recorrido de la horquilla	$q$	.120	m
Constante $k$ del resorte	$k/2$	15.54	N
Constante $k$ del resorte	$k/2$	15.54	N
Constante $b$ amortiguador	$b/2$	3.73	Nm/seg
Constante $b$ amortiguador	$b/2$	3.73	Nm/seg
Aceleración de la gravedad	$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

### III. La simulación de la respuesta del sistema con los bloques de Simulink®

Considerando que hemos analizado las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos:

$$(46) \quad M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

Identificamos  $M(q) = m, c(q, \dot{q}) = b$  y a  $g(q) = kq + mg$ , para la cual se piensa en el modelo PD dado por:

$$(47) \quad \tau = kp\ddot{q} - kv\dot{q} + g(q)$$

Donde:

$$(48) \quad \ddot{q} = q_d - q$$

Suponiendo que  $K_p$  y  $K_v$  son las matrices de ganancia proporcional y ganancia derivativa, respectivamente; y  $\ddot{q}$  es el error de posición definido como la diferencia entre la posición deseada y la real, ecuación (48). Relacionando las ecuaciones (46) y (47) se puede obtener la siguiente ecuación del movimiento:

$$(49) \quad \begin{aligned} M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) &= kp\ddot{q} - kv\dot{q} + g(q) \\ M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} &= kp\ddot{q} - kv\dot{q} \end{aligned}$$

Lo cual una representación de espacios de estados sería:

$$(50) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ m^{-1}(kp\ddot{q} - kv\dot{q} - b\dot{q}) \end{bmatrix}$$

ya que al despejar  $\ddot{q}$  de (49) se obtiene:

$$(51) \quad \ddot{q} = m^{-1}(kp\ddot{q} - kv\dot{q} - b\dot{q})$$

Por lo cual, ahora el objetivo de la simulación es realizar el diagrama a bloques del sistema en función a la ecuación (51), el diagrama a bloques es el siguiente (figura 5): En la figura 6 podemos apreciar la función descrita en la ecuación (51), la cual la resta de la posición deseada a  $\dot{q}$  posición,  $W$  es multiplicada por un  $K_p$  propuesto y al cual es sumado por un  $K_v$  la suma de las  $b$ .

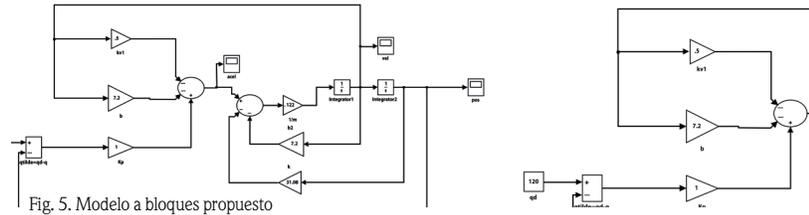


Fig. 5. Modelo a bloques propuesto

En la figura 7 podemos ver el diagrama de  $C(q, \dot{q})$  y la fuerza centrípeta, obtenida en la ecuación (46), la cual no es más que la constante del amortiguador y la constante  $k$  del resorte, que son las sumas de nuestra variables  $k/2$  y  $b/2$ .

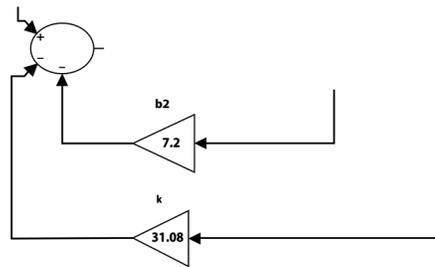


Fig. 7. Modelo a bloques de coriolis y fuerza centrípeta.

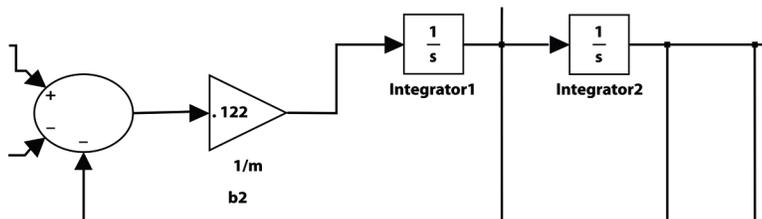


Fig. 8. Modelo a bloques de la matriz inversa, la velocidad y la posición.

En la figura 7 se aprecia la matriz inversa obtenida en la ecuación (46), al igual que la integración de la aceleración, obteniendo la velocidad y la integración de la velocidad obteniendo la posición.

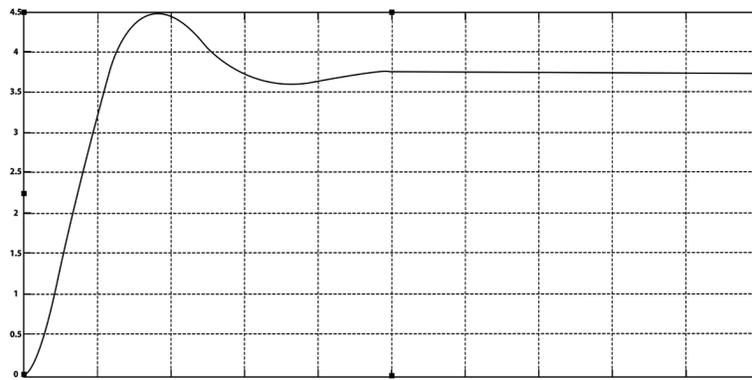


Fig. 9. Posición a los 120 mm. originales de una suspensión.

## IV Aplicaciones

Una aplicación de la caracterización que se ha desarrollado y pensado en esto desde un principio, es la horquilla con suspensión.

Las suspensiones en bicicletas en las que se puede aplicar lo realizado son en una bicicleta rígida<sup>1</sup> y del poste ajustable del asiento, en las cuales se presentarán dos modelos diferentes pero al mismo tiempo muy similares ya que hablamos del mismo trabajo de suspensión aplicado de diferentes maneras.

1: Se le conoce como bicicleta rígida aquellas que solo cuentan con suspensión en la horquilla y no en la parte trasera del cuadro.

## V Conclusión

Mediante el estudio de las suspensiones, se puede ver cómo es su comportamiento, al cual, con sus ecuaciones de movimiento obtenido, se conoce el comportamiento de estos sistemas de amortiguamiento. El propósito de la investigación fue resaltar (hacer notar) el comportamiento de la horquilla de la bicicleta, con ello podemos continuar con la investigación planteando nuevos objetivos, siempre buscando proporcionar al usuario herramientas de ingeniería para su uso cotidiano en la vida diaria, pero también en el ciclismo.

## VI Referencias

Sánchez Sánchez, P. (2005). *Control cartesiano de robots manipuladores*. [Tesis de Maestría], FCE/BUAP: México.

Kelly, R. Y Santibez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación: Madrid, ISBN: 84-205-3831-0.

