



Modelo dinámico de un sistema masa-resorte

José Carlos Romero Michiua

Asesor de Mecatrónica
Universidad del Valle de Puebla.

Resumen

De acuerdo a los grandes avances tecnológicos y a las necesidades de la actualidad, el uso de sistemas robóticos, que nos permitan hacer actividades riesgosas, hace que el diseño de sistemas robóticos sea de mucha importancia en las universidades. Este papel muestra un panorama en el proceso de desarrollo del modelo dinámico de un sistema de resorte-péndulo, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange por medio de un algoritmo que muestre la simulación del sistema anterior.

Palabras clave:

Resorte, robótica, Euler-Lagrange.

Abstract

According to the great technological advances and the needs of today, the use of robotic systems, which allow us to carry out risky activities, makes the design of robotic systems of great importance in universities. This paper shows an overview in the process of developing the dynamic model of a spring-pendulum system, by means of the Euler-Lagrange equations by means of an algorithm that shows the simulation of the previous system.

Keywords:

Euler-Lagrange, mechanics, robotic.

1. Introducción

Los robots manipuladores representan en la actualidad una de las herramientas tecnológicas más usadas, pues tiene una gran variedad de utilidades, desde el uso para transporte de materiales, el uso de montaje de circuitos electrónicos, y hasta cirugías en salas de hospitales. Debido a esto es necesario estudiar y comprender la metodología de diseño de estos sistemas.

Ecuaciones de Euler-Lagrange.

La energía total \mathcal{E} (*hamiltoniano*) del robot manipulador está dada por la suma de la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ más la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

Donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ representan los vectores de posición y velocidad, la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dependen de la posición y velocidad angular, por lo tanto $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ representa la energía potencial que depende solo de la posición.

Por otro lado, el Lagrangiano que es la diferencia de la energía cinética entre la energía potencial se denota como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2)$$

La ecuación de movimiento de Euler-Lagrange de un robot manipulador de n grados de libertad está dado por.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \quad (3)$$

Donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ que representa el vector de posición articulares o las coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidad y $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados que corresponden a las coordenadas generalizadas del sistema. Por otra parte \mathbf{q}_i y $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de la fricción estática \mathbf{f}_e .

El modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad está dado por la ecuación, que en su forma compacta y con la notación más ampliamente utilizada entre el área de robótica se encuentra descrito de la siguiente forma.

$$\tau = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (4)$$

Donde

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas o posición articular.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares.
- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y Coriolis.

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (5)$$

• $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenidos como el gradiente de la energía potencial

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (6)$$

Esto es debido a la gravedad.

• $\mathbf{f}_f(\mathbf{q}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de fricción que incluyen la fricción viscosa, de coulomb y estática (\mathbf{f}_e) de cada articulación del robot.[Reyes, 2011]

Planteamiento del problema

Considere el sistema mecánico mostrado en la figura.

• Al sistema mecánico masa-resorte se le aplica una fuerza $f = 8$ N, durante $t = 5$ segundos en la dirección del eje y, posteriormente la fuerza $f = 0$ N (si $t > 5$ segundos)

- Considere el escenario, cuando la fuerza aplicada $f = 0$ N, el sistema masa-resorte tiende a recuperar su posición natural, entrando en una serie de oscilaciones; en un caso realista, el movimiento tiene lugar en el plano $x - y$. Bajo este contexto, obtenga el modelo dinámico usando las ecuaciones de *Euler-Lagrange*.

- Desarrollar un programa en *Matlab* para llevar a cabo el proceso de simulación, considerando una fuerza $f=8$ N que se aplica en la dirección del eje y , durante 10 segundos; $k = 2.3 \frac{N}{m}$, $m = 5$ kg.



Figura 1: Sistema mecánico masa-resorte.

3.Solución del problema

Modelo dinámico del péndulo-resorte.

Se tiene el siguiente modelo, representado por un péndulo-resorte, a continuación, se tiene el desarrollo matemático algebraico para la obtención del modelo dinámico, por ecuaciones de Euler-Lagrange.

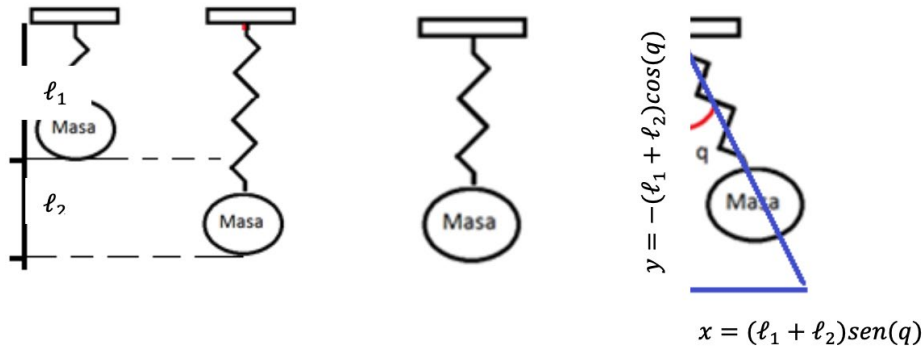


Figura 2: Diagrama de movimiento del péndulo en los ejes x y y.

De acuerdo al diagrama anterior tenemos.

Paso 1: Se obtiene la cinemática directa del sistema.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q) \\ -(\ell_1 + \ell_2)\text{cos}(q) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Paso 2: se obtiene la cinemática diferencial, la cual es la derivada temporal del modelo de cinemática directa (ecuación (7)).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q) \\ -(\ell_1 + \ell_2)\text{cos}(q) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\ell}_2\text{sen}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{cos}(q)\dot{q} \\ -\dot{\ell}_2\text{cos}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q)\dot{q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = X^T X$$

$$= [\dot{\ell}_2\text{sen}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{cos}(q)\dot{q} \quad -\dot{\ell}_2\text{cos}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q)\dot{q} \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\ell}_2\text{sen}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{cos}(q)\dot{q} \\ -\dot{\ell}_2\text{cos}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q)\dot{q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= ((\dot{\ell}_2\text{sen}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{cos}(q)\dot{q}) * (\dot{\ell}_2\text{sen}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{cos}(q)\dot{q})) \\ + ((-\dot{\ell}_2\text{cos}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q)\dot{q}) \\ * (-\dot{\ell}_2\text{cos}(q) + (\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q)\dot{q})) + (0 * 0)$$

$$= \dot{\ell}_2^2 (\text{sen}^2(q) + \text{cos}^2(q)) + (2\dot{\ell}_2(\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q)\text{cos}(q)\dot{q} \\ - 2\dot{\ell}_2(\ell_1 + \ell_2)\text{sen}(q)\dot{q}\text{cos}(q)) + (\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}^2 ((\text{sen}^2(q) + \text{cos}^2(q)))$$

Esto se puede simplificar usando, algunas identidades trigonométricas como $(\text{sen}^2(q) + \text{cos}^2(q))=1$, así que tenemos.

$$V = \dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}^2 \quad (8)$$

$$k = m \left(\dot{\ell}_2^2 + (\ell_2 + \ell_1)^2 \right) \dot{q}^2 \quad (9)$$

Paso 3: Se calcula el modelo de energía total llamada Lagrangiano \mathcal{L} , sumando el modelo de energía del resorte y la gravedad.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{resorte}} + \mathcal{U}_{\text{gravedad}}$$

$$\mathcal{U}_{\text{resorte}} = \frac{1}{2} k \ell_2^2$$

$$\mathcal{U}_{\text{gravedad}} = mg(\ell_1 + \ell_2) - mg(\ell_1 + \ell_2) \cos(q)$$

$$= mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q))$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 - mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q)) \quad (10)$$

Paso 4: Usando el Lagrangiano \mathcal{L} (ecuación (10)) obtenemos las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

Primero calcularemos la derivada parcial del Lagrangiano con respecto a $\dot{\ell}_2$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{\ell}_2} \left[\frac{m}{2} (\dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 - mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q)) \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}_2} = m \dot{\ell}_2 \quad (12)$$

A continuación calcularemos la derivada temporal de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}_2}$.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}_2} \right] = \frac{d}{dt} [m \dot{\ell}_2] = m \ddot{\ell}_2 \quad (13)$$

El siguiente es calcular la derivada del Lagrangiano, con respecto a ℓ_2

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\ell_2} = \frac{d}{d\ell_2} \left[\frac{m}{2} (\dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 - mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q)) \right]$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\ell_2} = m(\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}^2 - k\ell_2 - mg(1 - \cos(q)) \quad (14)$$

Ya que tenemos los termino de cada derivada (12), (13) y (14), podemos sustituir en la ecuación (11), todos los valores.

$$\mathcal{T}_\ell = m\ddot{\ell}_2 - m(\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}^2 - k\ell_2 - mg(1 - \cos(q)) \quad (15)$$

Ahora con respectó a q

Tenemos, la derivada parcial del Lagrangiano con respecto a \dot{q} .

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{m}{2} (\dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 - mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q)) \right]$$

El siguiente es calcular la derivada del Lagrangiano, con respecto a ℓ_2

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\ell_2} = \frac{d}{d\ell_2} \left[\frac{m}{2} (\dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 - mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q)) \right]$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\ell_2} = m(\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}^2 - k\ell_2 - mg(1 - \cos(q)) \quad (14)$$

Ya que tenemos los termino de cada derivada (12), (13) y (14), podemos sustituir en la ecuación (11), todos los valores.

$$\mathcal{T}_\ell = m\ddot{\ell}_2 - m(\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}^2 - k\ell_2 - mg(1 - \cos(q)) \quad (15)$$

Ahora con respectó a q

Tenemos, la derivada parcial del Lagrangiano con respecto a \dot{q} .

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{m}{2} (\dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 - mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q)) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} = m(\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q} \quad (16)$$

La derivada de $\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right]$, queda como, a continuación,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] = \frac{d}{dt} [m(\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}] = m(\ell_1 + \ell_2)^2 \ddot{q} + 2m\dot{q}(\ell_1 + \ell_2) \quad (17)$$

Por último la derivada del Lagrangiano, con respecto a q es:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dq} &= \frac{d}{dq} \left[\frac{m}{2} (\dot{\ell}_2^2 + (\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 - mg(\ell_1 + \ell_2)(1 - \cos(q))) \right] \\ \frac{d\mathcal{L}}{dq} &= -mg(\ell_1 + \ell_2) \text{sen}(q) \end{aligned} \quad (18)$$

Podemos sustituir los resultados de las ecuaciones (16), (17) y (18), en la ecuación (11). Para obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

$$\mathcal{T}_q = m(\ell_1 + \ell_2)^2 \ddot{q} + 2m\dot{q}(\ell_1 + \ell_2) - (-mg(\ell_1 + \ell_2) \text{sen}(q)) \quad (19)$$


4. Simulación de modelo dinámico péndulo-resorte

Para el algoritmo necesitamos despejar las variables ℓ_2 y \ddot{q} de las ecuaciones (15) y (19) respectivamente para ello proponemos nuestros estados.

$$x_1 = \ell_2, x_2 = \dot{\ell}_2, x_3 = q \text{ y } x_4 = \dot{q}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{\mathcal{T}_\ell + m(\ell_1 + x_1)^2 (x_4)^2 + kx_1 + mg(1 - \cos(x_3))}{m} \\ x_4 \\ \frac{\mathcal{T}_q - 2mx_4(\ell_1 + x_1) - mg(\ell_1 + x_1) \text{sen}(x_3)}{m(\ell_1 + x_1)^2} \end{bmatrix}$$

El programa que a continuación se muestra esta generado por medio de una función, en la cual se declara los valores de los estados los cuales nos ayudaran a mostrar el sistema. En la segunda parte se declaran las constantes que utilizara el sistema, como lo son la fuerza aplicada, la masa, la constante de rigidez del resorte, la constante gravitacional y la longitud inicial del resorte, estos se sustituirán en las ecuaciones de estados del sistema que se muestran en la ecuación (). Por último se genera la condición en la cual, se revisa si, se aplica una fuerza al sistema durante un tiempo de 10 *segundos*. Lo que quiere decir que si existe un tiempo mayor o igual a 10 *segundo*, entonces la fuerza aplicada es de 8 *Newton*, y el tiempo se reinicia a 0, pero si esto no es, entonces no hay una fuerza aplicada lo que quiere decir que $f=0$.




Función del modelo dinámico.

```

function xp=modelodinamico(t,x)
%vectores de estado
x1=x(1); %x
x2=x(2); %q
x3=x(3); %xp
x4=x(4); %qp
%parámetros del Sistema masa resorte
m=5; %masa
k=2.3; %constante de rigidez del resorte
g=9.81; %gravedad
l=1; % longitud inicial
x2p=((1./m)*(f+m*g*(1-cos(x3))+k*x1+m*(x1+l)*x4^2));
x4p=((1./(m*(x1+l)^2))*(f-2*m*x4*(x1+l)-m*g*(x1+l)*sin(x3)));
if(t<=10) %fuerza aplicada al sistema cuando t<2 segundos
F=8;
T=0;
else
F=0;
T=0;
end
xp=[x2; %Vector de salida formado
    x2p;
    x4;
    x4p;]
end

```

En el programa principal se borra y cierra todo lo que este en la memoria RAM de la computadora, para que no haya algún error, debido a un residuo de variables guardadas. Se declaran el vector de tiempo, y el vector de condiciones iniciales. Después se configura la función *ode45*(...) y por último se imprime las gráficas del sistema.



Función general de simulación.

```
clc; clear all; close all;
format short;
ti=0; h=0.001; tf=10; %parametros de simulación
ts=ti:h:tf;
ci=[0;0;0;0]; %condiciones iniciales
%configuración de la función de integración numérica ode45(..)
opciones=odeset('RelTol',h,'InitialStep',h,'MaxStep',h);
[t,x]=ode45('tarea',ts,ci,opciones);
figure
subplot(2,1,1)
plot(t,x(:,1))
title('Grafica de posición en eje Y')
xlabel('tiempo (segundos)')
ylabel('grados')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,x(:,2))
title('Grafica de velocidad en eje Y')
xlabel('tiempo (segundos)')
ylabel('grados')
grid on
figure
subplot(2,1,1)
plot(t,x(:,3))
title('Grafica posición en el eje X')
xlabel('tiempo (segundos)')
ylabel('grados')
grid on
subplot(2,1,2)
```

```

plot(t,x(:,4))
title('Grafica de velocidad en el eje X')
xlabel('tiempo (segundos)')
ylabel('grados')
grid on

```

Análisis de resultados

A continuación, se muestran los resultados obtenidos.

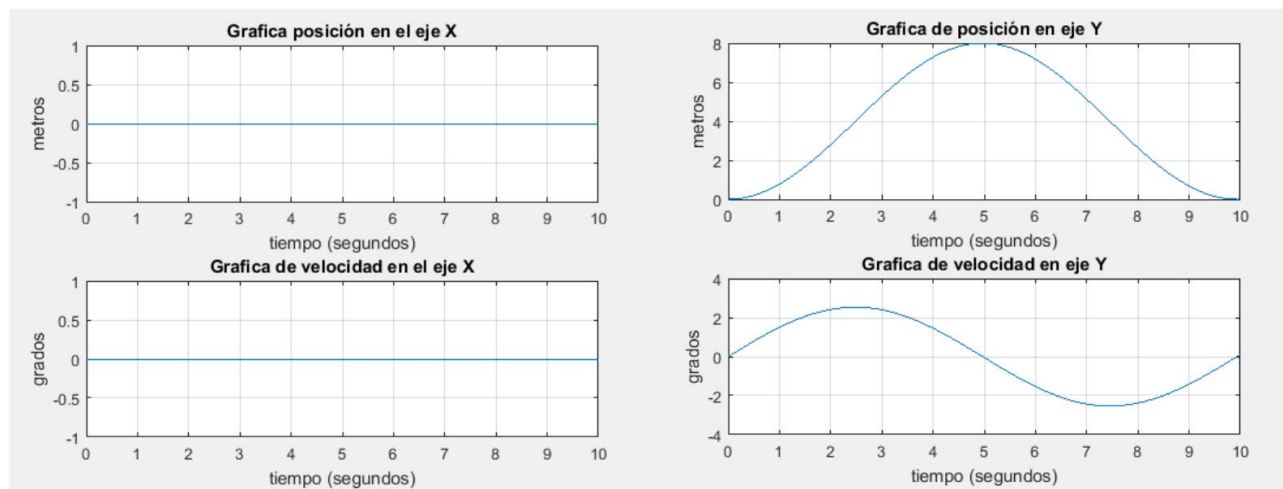


Figura 3: Grafica posición y velocidad del péndulo-resorte.

En la figura 3 podemos observar la graficas de la simulación del modelo dinámico del péndulo-resorte, con condiciones iniciales iguales a cero, las gráficas del lado izquierdo muestra la posición del péndulo en el eje X, Se puede notar que el péndulo se encuentra en una posición cero, esto es debido que se aplicó una fuerza, en modo ideal, esto quiere decir que la fuerza aplicada solo fue en el eje y. por esto la velocidad de este es igual a 0. En la gráfica del lado derecho se muestra la posición y velocidad del péndulo en el eje x, en este podemos observar que el péndulo está en una posición de reposo, pero al aplicarle una fuerza de 8 N, este se desplaza a una posición de 8 grado hasta regresar a su posición original en un tiempo de 10 *segundos*. Podemos observar que cuando el péndulo está en reposo la velocidad es cero, pero cuando tiene movimiento la velocidad obtiene valores tanto positivos como negativos.

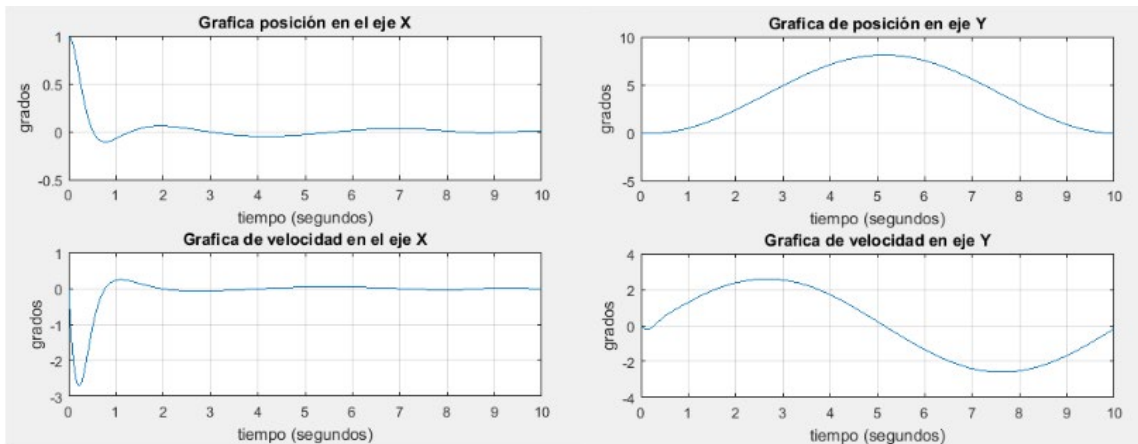


Figura 4: Grafica posición y velocidad del péndulo-resorte.

En la gráfica 4, al igual que en la anterior se puede ver la graficas de posición y velocidad de movimiento del péndulo-resorte, para este caso las condiciones iniciales cambian un poco, mientras las longitudes no cambian nada, el valor del Angulo q , será igual a 1. Esto simulara una perturbación del resorte en eje x . como lo podemos observar en la gráfica 4 inciso a), se observa que debido a la perturbación la posición del péndulo comienza en 1 y con respecto avanza el tiempo este se estabiliza y regresa a una posición de reposo, en tanto la velocidad oscila en rangos negativos y positivos hasta alcanzar el cero. Para el inciso b) observamos el movimiento del péndulo en el eje y , este como el anterior comienza en una posición de reposo, pero al poner una fuerza de 8 N , este cambia una posición de 8 m y se estabiliza al paso del tiempo, en tanto la velocidad oscila conforme al movimiento del péndulo y alcanza el cero, cuando el péndulo deja de moverse.

5. Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos, tras la obtención del modelo dinámico matemáticamente y la simulación del modelo dinámico, tenemos las siguientes conclusiones.

- Se obtuvo el modelo dinámico del péndulo-resorte, observando que la matemática utilizada fue muy sencilla.
- El proceso de obtención del modelo dinámico de cualquier sistema, es el mismo no importa la cantidad de grados o eslabones que este contenga.
- Euler-Lagrange nos permite obtener el modelo dinámico, de una manera menos complicada que el método tradicional, obteniendo todos los aspectos físicos del sistema.
- Por otra parte el observar los resultados podemos decir que el péndulo-resorte tiene un comportamiento no lineal, debido a que le movimiento no solo es el eje x , si no que existe movimiento en y y z . En la simulación se puede ver que si se aumenta un amortiguador este se puede alcanzar su estado de reposo en menor tiempo.

Referencias

Reyes C. Fernando. (2011) *Robótica Control de robot manipuladores*. Editorial Alfaomega, Primera Edición.